Algorithmisierbarkeit, Axiomatisierbarkeit und die Grenzen der Berechenbarkeit

Von Nadja Worliczek im Rahmen des Proseminars „Wurzeln der Informatik“

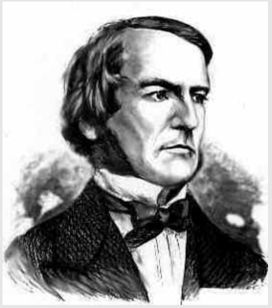
Übersicht

- Erste Anfänge, Raymundus Lullus, Leibniz und Boole
- Frege und seine Begriffsschrift
- Der Logizismus, Russel und Whitethead
- Die Grundlagenkrise der Mathematik und Reaktionen darauf
- Hilbert und seine Beweistheorie
- Gödel
- Berechenbarkeit
- Zusammenfassung
- Literaturliste

Erste Anfänge

- *Ars Magna* von Raymundus Lullus (1235 - 1316)
  Verfahren zur Auffindung aller „Wahrheiten“
  entstanden zwischen 1305 und 1308
- Ideen für eine *Lingua Characteristica* und eines *Calcul Ratiocinator*, also einer universellen Sprache zur formalen Beschreibung aller Wahrheiten und eines Kalküls zu deren Berechnung von Leibniz im 17. Jhd.

Raymundus Lullus

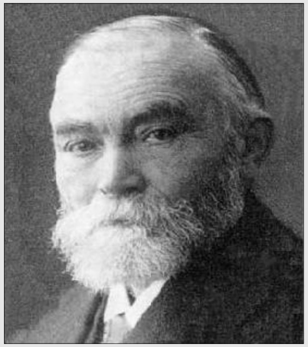


George Boole

- Entwicklung der *Booleschen Algebra* von George Boole (1815 – 1864) zur Beschreibung von Mengen (veröffentlicht 1854)

Freges Begriffsschrift

1879 veröffentlicht Gottlob Frege (1848 – 1925) seine *„Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen Denkens“*:



Gottlob Frege

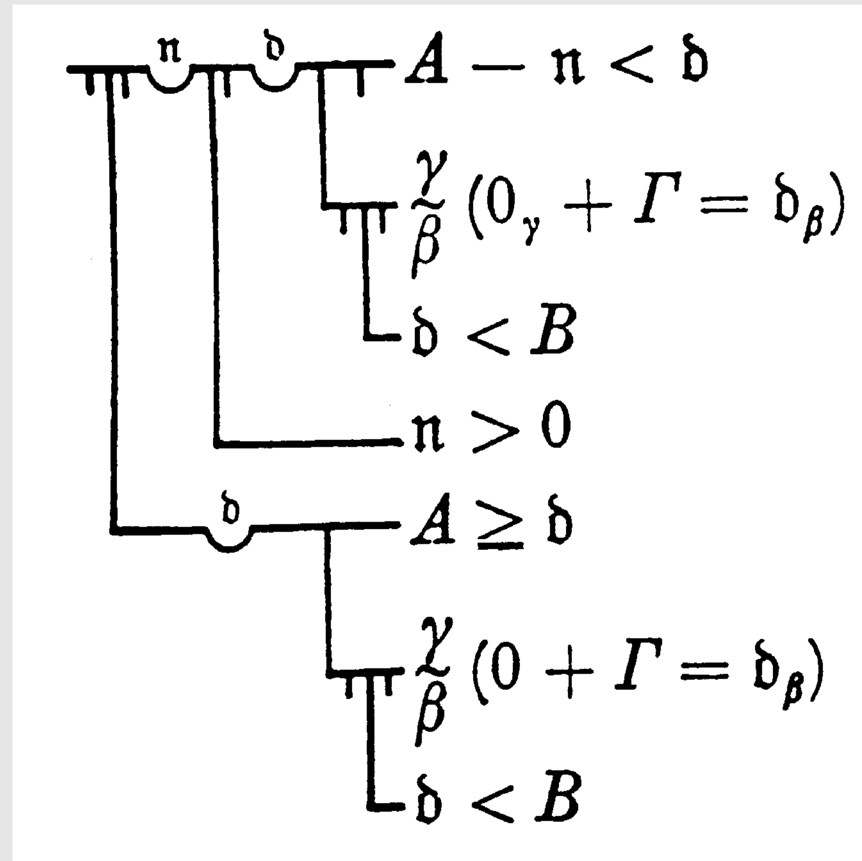
- Vollständige Entwicklung eines logischen Kalküls
- Begriff des Quantors und der logischen Funktion
- Einführung von Kennzeichnungstermen
- Klare Unterscheidung von Konstanten und Variablen
- Hervorhebung der Bedeutung der Implikation mit folgenden Axiomen:

$$A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$$
$$(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$$

- Schlussregel des *Modus Ponens:* Sind A und A —> B ableitbar, so auch B
- Verwendung von Booleschen Verknüpfungen zusammen mit Quantoren, Funktionen und Relationen
- Getrennte und explizite Entwicklung von Syntax und Semantik, damit Vorbild aller formalen Sprachen

Freges Notation

Basic concept	Frege's notation	Modern notations
Judging	⊢A , ⫣⊢ A	p(A) = 1 p(A) = i
Negation	—┬— A	¬ A ; ~A
Conditional (implication)	——┬—— A └—— B	B→A B ⊃ A
Universal quantification	—𝔲— Φ (𝔲)	∀y: Φ(y)
Existential quantification	—┬—𝔲—┬— Φ (𝔲)	∃y: Φ(y)
Content identity (equal sign)	A ≡ B	A = B



Die heute übliche Notation stammt von Guiseppe Peano (1858 - 1932)

Der Logizismus

- Versuch von Frege die Mathematik in reiner (typenfreier) Logik zu begründen
- *Russelsche Antinomie*:
  Sei N:={M | M Menge und M ist nicht in M enthalten}. Für N gibt es nun zwei Möglichkeiten:
  N enthält sich selbst, dann folgt ein Widerspruch, denn nach Definition darf N sich dann nicht enthalten.
  Enthält N sich selbst nicht, führt dies ebenfalls zum Widerspruch, da N sich dann nach Definition enthalten müsste

Bertrand Russel

Alfred North Whitehead

- Zweiter Versuch zur rein logischen Begründung der Mathematik in den *„Principia Mathematica“* von B. Russel (1872 – 1970) und A. N. Whitehead (1861 – 1947) mit einer verzweigten Typenlogik
- Antinomien wie oben werden vermieden, allerdings die klassische Mathematik nicht mehr daraus entwickelbar
- 1925 einfache Typenlogik von Ramsey, vermeidet ebenfalls die bekannten Antinomien

Die Grundlagenkrise der Mathematik

- Vom Logizismus ausgehende Besinnung auf die Grundlagen der Mathematik und damit einhergehend Erkenntnis, dass das bisherige nicht unproblematisch ist
- 1921 *„Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“* von Hermann Weyl

Verschiedene Lösungsansätze:

- *Intuitionismus* begründet von Brouwer,
  akzeptiert nur konkret konstruierbare Dinge als mathematische Wahrheit, insbesondere Ablehnung des indirekten Beweises, weite Teile der Mathematik werden damit zweifelhaft
- *„Formalismus“* von Hilbert,
  „Wir wollen uns nicht aus dem Paradies vertreiben lassen, das uns Cantor beschert hat.“

David Hilbert

- Geboren am 23. Januar 1862 im damaligen Königsberg (heute Kaliningrad)
- Studium in Königsberg, Freundschaft mit Minkowski und Hurwitz , 1884 Dissertation über Invariantentheorie
- 1885 Staatsexamen in Mathematik und Physik
- 1886 Habilitation über Invariantentheorie, anschliessend bis 1892 Privatdozent in Königsberg, danach Extraordinarius
- 1892 Heirat mit Käthe Jerosch
- 1895 Berufung nach Göttingen
- 1899 *„Grundlagen der Geometrie“*
- 1900 Vorstellung seiner 23 Probleme auf einem Kongress in Paris
- 1909 Tod Minkowskis
- ca. ab 1910 Arbeiten zur Axiomatik in der Physik
- In den 20ern Axiomatisierung der Zahlenlehre
- 1930 Emeritierung, Lehrtätigkeit bis Ostern 1934
- Gestorben am 14. Februar 1943 in Göttingen

David Hilbert

Das Hilbertsche Programm

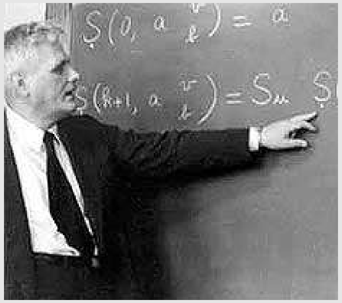
- Erste Phase 1900 - 1918 :
    - Schon 1898 in *„Grundlagen der Geometrie“* Methode des axiomatischen Aufbaus einer Theorie
    - Liste von 23 mathematischen Problemen: u.a. Cantors *Kontinuumsproblem* und Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome , Lösbarkeit von diophantischen Gleichungen
    - Existenz und Konsistenz einer mathematischen Theorie fallen zusammen
- Zweite Phase 1918 – 1930 :
    - Programm der finiten Beweistheorie
    - Axiomatisierung des Prädikatenkalküls
    - Frage nach der Vollständigkeit und Entscheidbarkeitbarkeit desselben wird aufgworfen
- Dritte Phase ab 1930 :
    - Erweiterungung des streng finiten Standpunktes zu einem allgemeineren konstruktiven
    - Idee von Hilbert vollständige Induktion durch *unendliche Induktion* zu ersetzen

Kurt Gödel


Kurt Gödel

- Geboren 1906 in Brünn / Österreich-Ungarn (heute Brno / Tschechien)
- Ab 1923 Studium in Wien, Schlick weckt sein Interesse für Logik
- 1929 in seiner Dissertation Beweis der Vollständigkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe
- 1931 *„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“,* die Arbeit wird 1932 als Habilitation akzeptiert, ab 1933 Privatdozent an der Uni Wien
- 1935 Beweis der Konsistenz des *Auswahlaxioms* mit den anderen Axiomen der Mengenlehre
- 1936 Ermordung Schlicks durch einen nationalsozialistischen Studenten
- 1938 Heirat mit Adele Porkert, Anschluss Österreichs an Nazideutschland
- 1940 Auswanderung in die USA aus Angst vor Einberufung in die Wehrmacht, *„Consistency of the Axiom of Choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axiomatic system of set theory“*
- 1940 – 46 ordentliches Mitglied des Institute for Advenced Study, bis 1953 ständiges (permanent) Mitglied, danach Professur in Princeton
- 1948 US-Staatsbürgerschaft
- Gestorben 1978 in Princeton / USA

Algorithmen und Berechenbarkeit



Alonzo Church

- Ausgangsfrage der Rekursionstheorie: allgemeiner Begriff des Algorithmus
- 1928 Gegenbeispiel von Ackermann zu Hilberts Annahme, dass alle berechenbaren Funktionen primitiv rekursiv seien
- 1931 Versuch von Herbrand rekursive Fkt. als durch einen Algorithmus gegebene Fkt. zu definieren, Gödelisierung
- 1934 Modifizierung dieser Definition durch Gödel
- 1936 nochmal modifiziert von Kleene, Beweis der Übereinstimmung der so definierten rekursiven Funktionen mit μ-rekursiven Funktionen

Alan Turing

- *Churchsche These*: Begriff der rekursiven Funktion und seines äquivalenten Begriffes der λ-definierbaren Funktion fällt mit dem der berechenbaren Funktion zusammen
- Turings *Maschinenmodell* stützt diese These, Turing-berechenbare Funktionen äquivalent zu rekursiven Funktionen
- Mit diesem Instrumentarium möglich zu zeigen, dass gewisse mathematische Probleme nicht algorithmisch lösbar sind (z.B. Unentscheidbarkeit von diophantischen Gleichungen, Wortproblem der Gruppentheorie)

Zusammenfassung

- Entwicklung der wichtigen Begriffe Rekursion, Algorithmus, Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit
- Weiterentwicklung der Mengenlehre, mathematischen Logik und der Mathematik im Allgemeinen (was wäre die Algebra ohne die axiomatische Methode)
- Grundsteinlegung für neue Forschungsgebiete, z.B. der Rekursionstheorie, der Komplexitätstheorie, Beweistheorie, Deduktionssysteme, ...
- Durch die Entwicklung formaler Sprachen wird die Grundlage für die Entwicklung von Programmiersprachen gelegt

Literatur

- Blumenthal, Otto, *Lebensgeschichte*. In Hilbert: Gesammelte Abhandlungen, Vol. III. Berlin: Springer, 1935, S. 388-429
- Schütte, Kurt / Schwichtenberg, Helmut, *Mathematische Logik*. In Fischer et. al. (Hg.): Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV. Braunschweig: Vieweg, 1990, S. 717-738
- Hermes, Hans, *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen.* Berlin: Springer, 1961
- Siekmann, Jörg, *Kapitel I: Geschichte und Anwendungen.* In Bläsius / Bürckert (Hg.): Deduktionssysteme. München: Oldenbourg, 1987, S. 3-20
- Hilbert, David / Rowe, David (Hg.): *Natur und mathematisches Erkennen. Vorlesungen gehalten 1919-20 in Göttingen.* Basel: Birkhäuser, 1992
- O'Connor, John / Robertson, Edmund F., *The MacTutor History of Mathematics archive*. Internet: www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html